

Problema 1. Estudia si es posible despejar $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ en las ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ xyu^3 + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $(u, v) = (1, 1)$. En caso afirmativo, calcula $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial z$ en el punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Problema 2. Prueba que la ecuación

$$xy = \log \frac{x}{y}$$

admite una única solución $y = f(x)$ de clase C^1 en un intervalo que contiene a $\sqrt{e}$ y verificando $f(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$. Deduce que la función $f(x)$ que queda así definida tiene un máximo local en $x = \sqrt{e}$.

Problema 3. Recordemos el siguiente resultado, donde tanto las normas involucradas como las bolas son las euclídeas estándar.

*Sean un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $a \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Supongamos que existen dos números $r, \lambda > 0$ y una matriz **ortogonal** P tales que*

$$\text{para todo } x \in \overline{B}(a, r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } v^t (Df(x)P) v \geq \lambda \|v\|^2.$$

Entonces f es inyectiva en $B(a, r)$ y $f(B(a, r)) \supset B(f(a), \lambda r)$.

Se pide dar un radio r de inyectividad alrededor de a y una bola centrada en $f(a)$ en la que esté definida la inversa local con $f(a) \mapsto a$, para cada una de las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y puntos $a \in \mathbb{R}^2$ siguientes [acuérdate de aprovechar la desigualdad $v_1 v_2 \geq -(v_1^2 + v_2^2)/2$]:

- a) $a = (4, 2)$ y $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy + e^{y/10} \\ 5x - \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$. Sugerencia: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) $a = (1, 1)$ y $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + \frac{\sin y}{6} \\ \frac{x}{10} - e^y \end{pmatrix}$. Sugerencia: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- c) $a = (0, 1)$ y $f(x, y) = \begin{pmatrix} 5e^y x + \cos y \\ x + y^4 \end{pmatrix}$. Sugerencia: $P = I_2$.
-

Problema 4. Sean X una variedad de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ e $Y \subset X$ un abierto relativo. Demuestra que Y es una variedad en $\mathbb{R}^n$ ¿cuál es la dimensión de Y ?

Problema 5. Para cada uno de los conjuntos siguientes dí, razonadamente, si es o no una variedad en el $\mathbb{R}^n$ correspondiente. En caso afirmativo, determina su dimensión.

- a) $\{(x, y) : xy = 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- b) $\{(x, y, z) : x^2 + y^7 = e^{xyz}\} \subset \mathbb{R}^3$.
- c) $\{A : \det A = 1\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.
- d) $\{A : \operatorname{tr} A = 1, \det A = 0\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.
-

Problema 6. Determina qué cuádricas son variedades en $\mathbb{R}^3$ y cuáles no.

Problema 7. Dada $f(x, y, z) = (z - 2)^2 + \max(0, (y^2 - x^2)^3)$, demuestra que $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dibuja el conjunto $X = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ ¿es X una variedad en $\mathbb{R}^3$?

Problema 8. Sea M el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 x_4 \neq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 1 \}.$$

- a) Demuestra que M es una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2.
- b) Halla una base del espacio tangente de M en $a = (1, 0, 0, -1)$.
- c) Halla una base del espacio normal de M en a . ¿Qué dimensión tiene?

Problema 9. Sea $\mathbb{R}^{n^2}$ el espacio vectorial de las matrices reales $n \times n$. Sea $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ el espacio vectorial de las matrices *simétricas* $n \times n$.

- a) Demuestra que $B \mapsto B^t + B$ define una aplicación de $\mathbb{R}^{n^2}$ a $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ lineal y suprayectiva.
Indicación: ¿en qué se transforma B si es simétrica?
- b) Dada cualquier matriz cuadrada A_0 , demuestra que $B \mapsto A_0^t B + B^t A_0$ define una aplicación lineal de $\mathbb{R}^{n^2}$ a $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ que es suprayectiva cuando A_0 es invertible.
- c) Demuestra que $f(A) = A^t A$ define una aplicación de $\mathbb{R}^{n^2}$ a $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ de clase C^∞ . Dadas A_0, B cualesquiera, calcula $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(A_0 + tB)$ y demuestra que la diferencial $(df)_{A_0}$ es la aplicación del apartado b).
- d) Deduce que el **grupo ortogonal** $O(n) = f^{-1}(I_n)$ es una variedad en $\mathbb{R}^{n^2}$ y di, razonadamente, cuál es la dimensión de $O(n)$. ¿Es compacta esta variedad?

Problema 10. Cierta variedad diferenciable M en $\mathbb{R}^4$ tiene una parametrización $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\Phi(u_1, u_2) = (u_1 + 2u_2, u_1^2 - 3u_2 - 1, u_1 u_2 - u_2, u_2^2)$$

de un entorno de $(u_1^0, u_2^0) = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ a un entorno de $a = (0, -1, 0, 0) \in M$.

- a) Halla una base del espacio tangente de M en a .
- b) Halla una base del espacio normal de M en a .
- c) Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 + x_3 x_4 - x_1 x_4 \\ 1 + x_2 e^{x_1 - 2x_2 - x_4} \end{bmatrix},$$

calcula la matriz de $df(a) : T_a M \rightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto de la base de $T_a M$ del apartado a).
